

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4

Lower bound $\Omega(n \log n)$ per
il problema dell'ordinamento (*)

Approfondimento: una terza variante dell'IS

InsertionSort3 (array A)

1. **for** k=1 **to** n-1 **do**
2. x = A[k+1]
3. j = **ricerca_binaria**(A[1,k],x)
/* j è la posizione in cui andrà inserito x
4. **for** i=k **downto** j **do**
5. A[i+1] = A[i]
6. A[j]=x

$r_k \leq \log k$ in quanto
ci si ferma non
appena si trova un
elemento pari ad **x**
oppure **x** non viene
trovato

$s_k \leq k$
spostamenti

il tutto
eseguito
n-1
volte

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (r_k + s_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\log k + k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} 2k = O(n^2)$$

Una terza variante dell'IS (2)

- **Caso peggiore:** x andrà inserito in prima posizione, e quindi in tal caso $r_k = \log k$ e $s_k = k$, e quindi

$$T_{worst}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (\log k + k) = \Theta(n^2)$$

- **Caso migliore:** si ha quando minimizzo $r_k + s_k$ e quindi, intuitivamente, x andrà inserito “vicino” alla posizione k -esima. Quindi, la ricerca binaria deve spostarsi **sempre verso destra**. Ma se una tale ricerca binaria termina dopo t iterazioni, allora $r_k + s_k = t + k/2^t$, e questa funzione è **monotona decrescente** per $1 \leq t \leq \log k$, e quindi raggiunge il suo minimo per $t = \log k$ (cioè proprio quando x è maggiore di tutti gli elementi della sequenza). In tal caso $r_k = \log k$ e $s_k = 0$, e quindi:

$$T_{best}(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \log k = \log n! \leq \log n^n = n \log n,$$

cioè $T_{best}(n) = O(n \log n)$, ma come vedremo con l'approssimazione di Stirling, $\log n! \geq \log (n/e)^n = n \log (n/e) = \Omega(n \log n)$, cioè $T_{best}(n) = \Omega(n \log n)$, e quindi

$$T_{best}(n) = \Theta(n \log n)$$

Una terza variante dell'IS (3)

- **Caso medio:** la posizione attesa di x sarà quella mediana della sequenza, e quindi $s_k = k/2$, da cui, senza nemmeno contare i confronti delle chiamate ricorsive

$$T_{avg}(n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} k/2 = \Omega(n^2)$$

da cui, essendo chiaramente $T_{avg}(n) = O(n^2)$, ne consegue che $T_{avg}(n) = \Theta(n^2)$.

- Quindi, ricapitolando, InsertionSort3 è meglio di InsertionSort1 ma peggio di InsertionSort2.

Approfondimento: Algoritmo Bubble Sort

```
Bubble-Sort(array A)
limite = n
for k=1 to (n-1)
  do { for i=1 to (limite-1)
      do { if (A[i] > A[i+1])
          then scambia A[i] e A[i+1]
        }
      }
  limite = limite - 1
```

L'algoritmo è corretto? **Sì** (dimostrazione analoga al **Selection Sort**, facendo vedere per induzione che alla fine del passo **k** i **k** elementi più grandi della sequenza compaiono in ordine non decrescente nelle ultime **k** posizioni dell'array)

Qual è la complessità temporale dell'algoritmo?

- linea (o il blocco di linee di codice) eseguito più volte

if (A[i] > A[i+1]) - operazione di confronto

- Numero volte che viene eseguita

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n - k) = \Theta(n^2)$$

-Notare- il numero di volte che questa linea viene eseguita non dipende dall'input $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$.

Stato dell'arte sull'ordinamento

	Caso migliore	Caso medio	Caso peggiore	T(n)	S(n)
Selection Sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
Insertion Sort 1	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
Insertion Sort 2	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$\Theta(n)$
Insertion Sort 3	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$O(n^2)$	$\Theta(n)$
Bubble-Sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$

Nota: il **Bubble-Sort** può essere facilmente modificato in modo tale che il caso migliore costi $\Theta(n)$. Come?

Quindi, per il problema dell'ordinamento...

- Lower bound **temporale**: $\Omega(n)$
 - “banale”: dimensione dell'input
- Upper bound **temporale**: $O(n^2)$
 - Insertion Sort 2 e 3

Abbiamo un **gap lineare** tra upper bound e lower bound!

È possibile chiudere tale gap?

Ordinamento per confronti

Dati due elementi a_i ed a_j , per determinarne l'ordinamento relativo effettuiamo una delle seguenti operazioni di confronto:

$$a_i < a_j ; a_i \leq a_j ; a_i = a_j ; a_i \geq a_j ; a_i > a_j$$

Non si possono esaminare i valori degli elementi o ottenere informazioni sul loro ordine in altro modo.

Notare: Tutti gli algoritmi di ordinamento considerati fino ad ora sono algoritmi di ordinamento per confronto.

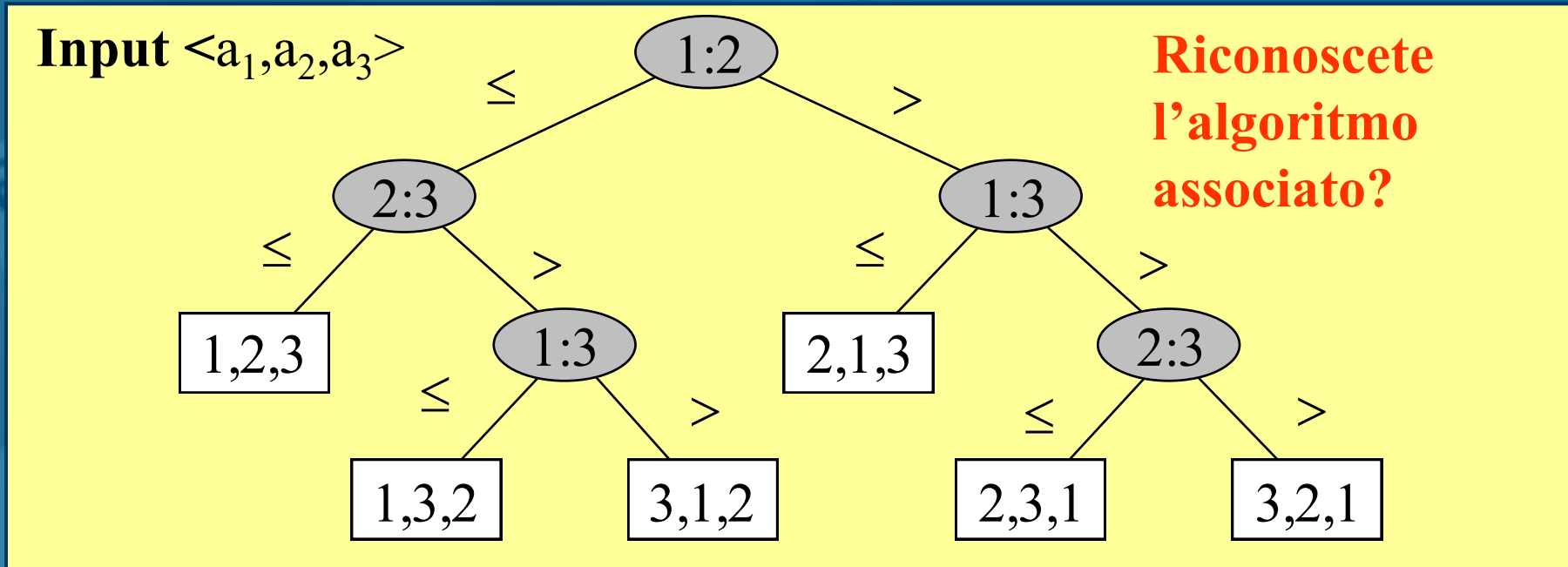
Lower bound $\Omega(n \log n)$ per l'ordinamento

- Consideriamo un generico algoritmo \mathcal{A} , che ordini eseguendo **solo confronti**: dimostreremo che \mathcal{A} esegue (**nel caso peggiore**) $\Omega(n \log n)$ confronti
 - Un generico algoritmo di ordinamento per confronti lavora nel modo seguente:
 - Confronta due elementi a_i ed a_j (ad esempio effettua il test $a_i \leq a_j$);
 - A seconda del risultato, riordina e/o decide il confronto successivo da eseguire.
- \Rightarrow Un algoritmo di ordinamento per confronti può essere descritto in modo astratto usando un **albero di decisione**, nel quale i nodi interni rappresentano i confronti, mentre le foglie rappresentano gli output prodotti

Albero di decisione

- Un albero di decisione è associato ad uno specifico **algoritmo** \mathcal{A} e ad una specifica **dimensione** n dell'istanza
- Descrive le diverse sequenze di **confronti** che \mathcal{A} esegue su un'istanza $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ di lunghezza n ; i movimenti dei dati e tutti gli altri aspetti dell'algoritmo vengono ignorati
- **Nodo interno** (non foglia): $i:j$ (modella il confronto tra a_i e a_j)
- **Nodo foglia**: i_1, i_2, \dots, i_n (modella una risposta (output) dell'algoritmo, ovvero una permutazione $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \rangle$ degli elementi)

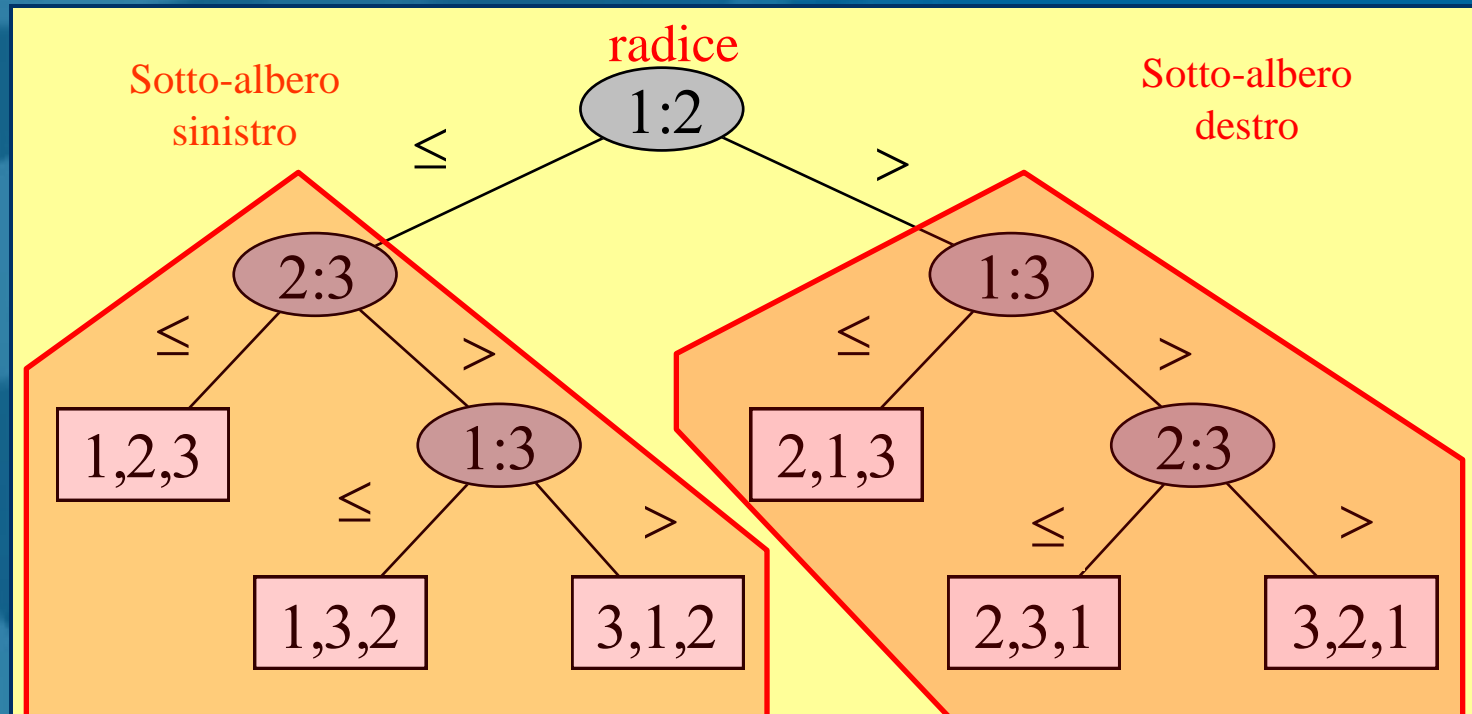
Esempio



È proprio l'**Insertion Sort 2** su una sequenza di 3 elementi!

Approfondimento: costruire l'albero di decisione per il SS (e per il BS) su una sequenza di 3 elementi.

Richiamo di definizioni



Profondità di un nodo: lunghezza del cammino (in termini di **numero di archi**) che lo congiunge alla radice.

Altezza di un albero: valore massimo della profondità dei nodi.

Proprietà

- Per una particolare istanza, i confronti eseguiti da \mathcal{A} su quella istanza rappresentano un **cammino radice – foglia**
- L'algoritmo segue un cammino diverso a seconda delle caratteristiche dell'input
 - Caso peggiore: cammino più lungo
 - Caso migliore: cammino più breve
- Il numero di confronti nel caso peggiore è pari **all'altezza dell'albero di decisione** (ovvero alla lunghezza, in termini di numero di archi, del più lungo cammino **radice-foglia**)

Altezza in funzione delle foglie

Lemma: Un albero binario (ovvero, in cui ogni nodo interno ha al più due figli) con k foglie ha altezza $h(k) \geq \log_2 k$.

Dim: Dimostrazione per induzione sul numero di foglie k :

- Caso base $k=1$: banale, perché ogni albero con una foglia deve avere almeno altezza $\log_2 1 = 0$ (anche nel caso limite dell'albero costituito da un unico nodo ●)
- Caso $k > 1$: supposto vero per $k-1$ foglie, dimostriamolo per k ; poiché la radice ha almeno un figlio, uno dei suoi al più due sottoalberi deve contenere almeno la metà delle foglie, e quindi

$$\begin{aligned} h(k) &\geq 1 + h(k/2) \geq \text{(hp induttiva)} \quad 1 + \log_2(k/2) \\ &= 1 + \log_2 k - \log_2 2 = \log_2 k. \end{aligned}$$

QED

Il lower bound $\Omega(n \log n)$

- Consideriamo l'albero binario di decisione di un qualsiasi algoritmo che risolve il problema dell'ordinamento di n elementi
- Tale albero deve avere almeno $n!$ foglie: infatti, se l'algoritmo è corretto, deve contemplare tutti i possibili output, ovvero le $n!$ permutazioni della sequenza di n elementi in input
- Dal lemma precedente, avremo che l'altezza $h(n)$ dell'albero di decisione sarà:

$$h(n) \geq \log_2(\#foglie) \geq \log_2(n!) > \log_2 (n/e)^n =$$

Formula di Stirling:

$$n! \geq (2\pi n)^{1/2} \cdot (n/e)^n > (n/e)^n$$

$$= n \log_2 (n/e) =$$

$$= n \log_2 n - n \log_2 e =$$

$$= \Omega(n \log n)$$

QED